Résumé : Propagation d'une OEMPPM dans un métal

• **Les équations de MAXWELL dans un métal <u>en notation complexe</u>**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}.\underline{\overrightarrow{E}} &= 0 \\
\overrightarrow{\nabla} \wedge \underline{\overrightarrow{E}} &= -\frac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t} \\
\overrightarrow{\nabla}.\underline{\overrightarrow{B}} &= 0 \\
\overrightarrow{\nabla} \wedge \underline{\overrightarrow{B}} &= \mu_0 \underline{\sigma}\ \underline{\overrightarrow{E}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t}
\end{aligned}$$

• **L'équation de propagation du champ électrique est** :

$$\triangle \underline{\overrightarrow{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \underline{\sigma}\ \frac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t}$$

• **Relation de dispersion** :

$$\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -i\omega\mu_0\underline{\sigma}$$

• **Champ électromagnétique à basse fréquence** ($\omega << \frac{1}{\tau} \approx \mathbf{10^{14}}$ **rad.s**$^{-1}$) se propageant dans le sens des z croissants

$$\begin{aligned}
\underline{\overrightarrow{E}} &= \overrightarrow{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \\
\underline{\overrightarrow{B}} &= \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega}\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}}$ distance caractérisant la profondeur de pénétration de l'onde électromagnétique dans le métal, appelé **épaisseur de peau**. (σ_0 étant la conductivité électrique du métal en régime indépendant du temps).

• **Modèle d'un conducteur parfait** : la conductivité d'un métal parfait étant infinie :

$$\delta \longrightarrow 0$$

D'où :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{0} \quad et \quad \underline{\overrightarrow{B}} = \overrightarrow{0}$$

Par conséquent, d'après l'équation de MAXWELL-AMPÈRE :

$$\underline{\overrightarrow{j}} = \overrightarrow{0}$$

• **Champ électromagnétique à haute fréquence :** $\omega >> \frac{1}{\tau} \approx 10^{14}$ **rad.s**$^{-1}$

Deux cas à distinguer :

1er cas : $\omega < \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$ **pulsation plasma** (n nombre d'électrons par unité de volume et m masse d'un électron).

Pour une propagation à z croissant, le champ électromagnétique complexe s'écrit :

$$\begin{aligned}
\underline{\overrightarrow{E}} &= \overrightarrow{E}_0 \exp(-k"z) \exp i(\omega t) \\
\underline{\overrightarrow{B}} &= k"\,\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{E}_0 \exp(-k"z) \exp i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$k" = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$$

Il s'agit d'une onde stationnaire dont l'amplitude du champ décroît exponentiellement. C'est une **onde évanescente**. Dans ce domaine de fréquence, l'onde ne peut pas se propager dans un métal, c'est le cas, de la lumière visible.

2ème cas : $\omega > \omega_p$

Pour une propagation à z croissant, le champ électromagnétique complexe s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= \vec{E}_0 \exp i(\omega t - k\omega) \\ \underline{\vec{B}} &= \frac{k}{\omega}\vec{e}_z \wedge \vec{E}_0 \exp i(\omega t - k\omega) \end{aligned}$$

avec :

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

Il s'agit d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant dans le métal, sans atténuation, à la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

La vitesse de groupe est :

$$v_g = \frac{dk}{d\omega} = \frac{c}{v_\varphi^2} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$