

Résumé : Propagation libre d'ondes planes dans le vide

• **Onde plane** : C'est une onde décrite par une fonction S dépendant d'une seule coordonnée **cartésienne** X et du temps t .

• **Équation de D'ALEMBERT à une dimension** :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

• **Sa solution** :

$$S = f_+ \left(t - \frac{X}{c} \right) + f_- \left(t + \frac{X}{c} \right)$$

★ $f_+ \left(t - \frac{X}{c} \right)$ représente une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des X croissants.

★ $f_- \left(t + \frac{X}{c} \right)$ représente une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des X décroissants.

• **Structure d'une onde électromagnétique plane progressive dans le sens des X croissants** :

$$\vec{E} \perp \vec{e}_X ; \quad \vec{B} \perp \vec{e}_X \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\vec{e}_X \wedge \vec{E}}{c}$$

• **Onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant dans la direction d'un axe OX** :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

\vec{E}_0 indépendant de X, Y, Z et t .

ω la pulsation de l'onde, $\vec{k} = k \vec{e}_X = \overrightarrow{ct\dot{e}}$ vecteur d'onde et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = X \vec{e}_X + Y \vec{e}_Y + Z \vec{e}_Z$.

Dans ce cas :

$$\vec{\nabla} \equiv -i \vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv i\omega$$

★ **Relation de dispersion** : C'est la relation entre k et ω .

★ **Vitesse de phase** : C'est la vitesse des plans équiphasés.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\mathcal{R}e(\underline{k})}$$

★ **Vitesse de groupe** : C'est la vitesse du sommet de l'enveloppe d'un paquet d'onde.

$$v_g = \frac{d\omega}{d\mathcal{R}e(\underline{k})}$$

Il n'a de signification physique que si l'étendue spectrale est étroite et le milieu peu dispersif, sinon le paquet d'onde se déforme complètement au cours de sa propagation.

★ **Vecteur de POYNTING instantané** :

$$\vec{\pi} = \frac{(\mathcal{R}e \vec{E}) \wedge (\mathcal{R}e \vec{B})}{\mu_0}$$

★ Vecteur de POYNTING **complexe** :

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0}$$

★ Vecteur de POYNTING **moyen** :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \vec{\pi} = \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}e (\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$

★ Densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\mathcal{R}e \vec{E})^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\mathcal{R}e \vec{B})^2$$

★ Densité volumique **moyenne** d'énergie électromagnétique :

$$\begin{aligned} \langle u_{em} \rangle &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathcal{R}e (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) + \frac{1}{4\mu_0} \mathcal{R}e (\vec{B} \cdot \vec{B}^*) \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\vec{B}|^2 \end{aligned}$$