Résumé : Équations de MAXWELL en régime variable

• **Densité volumique de charge :**

$$\rho = \frac{dq}{d\tau}$$

• **Densité volumique de courant :**

$$\vec{j} = \sum_k \rho_k \vec{v}_k = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$$

avec : ρ_k densité volumique de charges de type k, **mobiles** à la vitesse $\vec{v}_k$ dans le référentiel d'étude et n_k nombre de charges q_k par unité de volume.

• **Courant électrique à travers une surface S fixe dans le référentiel d'étude :**

$$i = \iint_S \vec{j}\,.\,dS\vec{n}$$

• **Force de LORENTZ :**

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

• **Équations de MAXWELL dans le vide en présence de charges et de courants :**

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{MG} \qquad ; \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{MF}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad \text{M}\Phi \qquad ; \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{MA}$$

avec : $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3.10^8$ m.s^{-1} la célérité de l'onde électromagnétique dans le vide par rapport à tout référentiel galiléen.

• **Équation locale de la conservation de la charge** :

$$\vec{\nabla}.\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

• **Équations de propagation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$:**

$$\begin{aligned} \triangle\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{\vec{\nabla}\rho}{\varepsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \\ \triangle\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{j} \end{aligned}$$

• **Potentiels électromagnétiques :**

Soient $\vec{A}$ et V respectivement le potentiel vecteur et le potentiel scalaire.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

• **Condition de jauge de LORENTZ** :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

• **Équations de POISSON des potentiels :**

$$\triangle\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\triangle V-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

• **Solutions des équations de Poisson :**

Les potentiels retardés créés par une source d'extension finie en un point M, à l'instant t, sont :

$$\begin{aligned}V(M,t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\tau \frac{\rho\left(P,t-\frac{PM}{c}\right)}{PM}d\tau\\ \overrightarrow{A}(M,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\overrightarrow{j}\left(P,t-\frac{PM}{c}\right)}{PM}d\tau\end{aligned}$$

où $\frac{PM}{c}$ temps de retard dû à la propagation de l'onde pour aller du point P au point M.

• **L'approximation des régimes quasi-stationnaire ou quasi-permanent (A.R.Q.S ou A.R.Q.P)**

L'A.R.Q.S consiste à négliger le temps de retard $\frac{PM}{c}$ devant le temps caractéristique de l'évolution de $\rho(P,t)$ et $\overrightarrow{j}(P,t)$. Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}V(M,t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\tau \frac{\rho\left(P,t\right)}{PM}d\tau\\ \overrightarrow{A}(M,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\overrightarrow{j}\left(P,t\right)}{PM}d\tau\end{aligned}$$

• **Énergie électromagnétique**

⋆ Vecteur de Poynting instantané :

$$\overrightarrow{\pi}=\frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

⋆ L'énergie électromagnétique se trouvant dans un volume τ, à l'instant t, est :

$$W_{em}(t)=\iiint_\tau u_{em}d\tau$$

avec : $u_{em}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{2\mu_0}$ densité volumique d'énergie électromagnétique.

⋆ L'énergie électromagnétique cédée à une distribution de charges et de courants, de volume τ, entre les instants t et $t+dt$, est :

$$W_{cedee}=\iiint_\tau \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}\ dt\ d\tau$$

⋆ L'énergie électromagnétique rayonnée à travers une surface S **fermée**, entre les instants t et $t+dt$, est :

$$W_{ray}=\oiint_S \overrightarrow{\pi}.\ d\overrightarrow{S}dt$$

avec $d\overrightarrow{S}=dS\overrightarrow{n}$ vecteur élément de surface centré en un point quelconque de la surface S et $\overrightarrow{n}$ vecteur unitaire orientée vers **l'extérieur**.

⋆ Équation locale de conservation de l'énergie

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\pi}+\frac{\partial u_{em}}{\partial t}+\overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}=0$$

• **Relations de passage des champs électromagnétiques entre deux milieux**

Considérons une surface S séparant deux milieux (1) et (2) et caractérisées par une densité surfacique de charges σ et une densité surfacique de courants $\overrightarrow{j}_S$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}_{1\longrightarrow 2} \\
\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 &= \mu_0 \overrightarrow{j}_S \wedge \overrightarrow{n}_{1\longrightarrow 2}
\end{aligned}$$

avec $\overrightarrow{n}_{1\longrightarrow 2}$ vecteur unitaire normal à S et orienté du milieu (1) vers le milieu (2).